Matrices et applications linéaires

Table des matières

Dans l'ensemble de ce chapitre, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

1 Représentation matricielle

1.1 Matrice colonne des coordonnées dans une base

1.1.1 Définition

Définition 1.1 : *Rappel : matrice colonne des coordonnées dans une base*

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $x \in E$. On appelle **matrice colonne des coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Comme les coordonnées dans une base sont uniques, chaque vecteur a une unique matrice dans une base et à chaque matrice correspond un unique vecteur dans une base.

Exemple 1. *Soit $Q(X) = -2 + 2\,X + X^2$. La matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice colonne des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

1.1.2 Matrice de passage

Définition 1.2 : *Matrice de passage*

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de ϵ_j dans la base $\mathcal{B}$.

Autrement dit, si pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i = p_{1,j} e_1 + p_{2,j} e_2 + \cdots + p_{n,j} e_n,$$

alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, c'est-à-dire

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i,1} & p_{i,2} & \cdots & p_{i,j} & \cdots & p_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Exemple 2. *Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ s'écrit alors*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1+X & 1+X^2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

1.1.3 Changement de coordonnées dans une base

Théorème 1.3 : *Changement de coordonnées dans une base*

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, X'.$$

Exemple 3. *Reprenons les notations de l'exemple 1 et la matrice de passage de l'exemple 2. On a :*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q).$$

1.2 Matrice associée à une application linéaire

1.2.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 1.4 : *Matrice d'une famille de vecteurs dans une base*

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille** $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est la matrice de f_j dans la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.

De même, pour une base $\mathcal{B}$ fixée, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est unique.

Exemple 4. *On définit la famille (P, Q, R) par*

$$P(X) = 1 + 2\,X + X^2, \quad Q(X) = X + 2\,X^2, \quad R(X) = -3 - X^2.$$

La matrice de la famille (P, Q, R) dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de la famille (P, Q, R) dans la base $\mathcal{B}' = (1, 1 + X, 1 + X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

Remarque 1.5 : *Ecriture de la matrice de passage*

On remarque qu'une matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ s'écrit alors

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)$$

1.2.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 1.6 : *Matrice d'une application linéaire dans des bases*

Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de** u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de la famille $u(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\mathcal{B}_E)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)).$$

Les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ étant fixées, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$ d'une application linéaire u est unique.

Remarque 1.7 : *Taille de la matrice d'une application linéaire dans des bases*

Si E est de dimension p et F de dimension n, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En effet,

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$ a n lignes, comme le nombre de vecteurs de la base d'arrivée.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$ a p colonnes, comme le nombre de vecteurs de la famille $u(\mathcal{B}_E)$.

Attention ! La notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ peut être utilisée dans certains livres à la place de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$. Le programme impose les notations de la définition.

Exemple 5. *On définit l'application linéaire par*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Puisque l'on a

$$u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice de l'application linéaire u dans les bases canoniques $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ *et* $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Solution.

On verra à la définition 2.1 que dans le cas d'un endomorphisme où la base de départ et d'arrivée est la même, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 6. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et v l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$v : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Déterminer la matrice de l'endomorphisme v dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.

1.2.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 1.8 : *Application linéaire canoniquement associée à une matrice*

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(u) = A.$$

u est appelée **application linéaire canoniquement associée à** A.

Exemple 7. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire canoniquement associée est l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_1\, u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\, u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\, u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{par linéarité de } u \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{par lecture des colonnes de } A \\ &= \begin{pmatrix} 2\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 \\ 3\,x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 1.9 : *Application linéaire canoniquement associée à une matrice*

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note u l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & A\,X \end{array}$$

Exemple 8. *En reprenant l'exemple précédent, l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est bien définie par*

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 1.10 : *Matrices lignes et formes linéaires*

(i) Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et u une forme linéaire sur E. Alors $\mathrm{Mat}_{1,\mathcal{B}_E}(u)$ est une matrice ligne (à p colonnes).

(ii) Réciproquement, l'application linéaire canoniquement associée à une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple 9. *On considère la matrice ligne*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire canoniquement associée est la forme linéaire u sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 \end{array}$$

1.2.4 Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur

En pratique, le théorème suivant montre que la composition par une application linéaire u correspond au produit par la matrice de u.

Théorème 1.11 : *Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on note

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u), \quad X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \quad \text{et} \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y),$$

alors

$$y = u(x) \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Comme $x \in E$ et $y \in F$, alors il existe des scalaires x_j et y_i tels que

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i.$$

On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Ainsi, pour $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$, donc

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u\left(e_j\right) \qquad \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) f_i. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, par identification des coefficients dans la base $\mathcal{B}_F$ puis par définition du produit matriciel

$$y = u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX.$$

□

Exemple 10. *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $P(X) = 1 + X + X^2$, calculer $u(P)$.

Solution.

Exemple 11. *Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On définit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ par*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) &\mapsto P'(X) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Soit $Q(X) = X^3 - 2X + 1$. Déterminer $u(Q)$.

Solution.

Exemple 12. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* v *l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl} v: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

On a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *déterminer* $v\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution.

1.3 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

Propriété 1.12 : *Linéarité de la représentation matricielle d'une application linéaire*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) + \mu\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v).$$

On a vu que pour des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$ correspond à une unique application linéaire u de $\mathcal{L}(E, F)$. Par conséquent, si E est de dimension p et F de dimension n, alors l'application linéaire suivante est un isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}: & \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) \end{array}$$

Puisque $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $n\,p$, nous pouvons en déduire la remarque suivante.

Remarque 1.13 : *Dimension de* $\mathcal{L}(E, F)$

Si E est de dimension p et F de dimension n, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension $n\,p$.

Proposition 1.14 : *Matrice d'une composée d'applications linéaires*

Soient E, F et G munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$$

On retiendra que la multiplication des matrices correspond à la composition des applications linéaires.

Démonstration. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v \circ u)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}\left((v \circ u)(x)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\, \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)\right) \\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)\right)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

Puisqu'à l'application $v \circ u$ ne correspond qu'une seule matrice dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, il s'agit de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$. □

1.4 Rang d'une matrice

Définition 1.15 : *Rang d'une matrice*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **rang de la matrice** A, le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, si

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_p \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p) = \dim(\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)).$$

Propriété 1.16 : *Rang d'une matrice invariant par opération sur les colonnes*

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire sur ses colonnes.

Démonstration. On a vu dans le chapitre Compléments sur les espaces vectoriels que le rang de l'une famille ne changeait pas si l'on effectuait des opérations élémentaires sur cette famille. □

Exemple 13. *Déterminer le rang de la matrice* $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution.

Définition 1.17 : *Rappel : transposée d'une matrice*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit sa **transposée** ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ en échangeant les lignes et les colonnes de A. Autrement dit, si

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_p \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} - & f_1 & - \\ - & f_2 & - \\ & \vdots & \\ - & f_p & - \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.18 : *Rang de la transposée*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est hors programme. □

Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes de ${}^tA$ revient à effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A. On peut donc affirmer la propriété suivante.

Propriété 1.19 : *Rang d'une matrice invariant par opération élémentaire*

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes.

Afin d'élaborer une méthode pour déterminer le rang d'une matrice, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 1.20 : *Matrice échelonnée*

Une matrice est dite **échelonnée en lignes** si le nombre de 0 au début de chaque ligne est strictement croissant quand on passe d'une ligne à la suivante jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros. Le premier élément non nul de chaque ligne dans une matrice échelonnée s'appelle le **pivot**.
La définition d'une matrice **échelonnée en colonnes** est analogue.

Exemple 14. *Les matrices suivantes sont échelonnées en lignes*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas des matrices carrées, les matrices échelonnées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices triangulaires supérieures.

Méthode 1.21 : *Comment déterminer le rang d'une matrice ?*

Puisque le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée de même rang à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots non nuls de la forme échelonnée.

Exemple 15. *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution.

Théorème 1.22 : *Lien entre rang d'une application linéaire et de sa matrice*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$. Alors

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\,(A)$$

Le rang d'une application linéaire est donc le rang de n'importe laquelle de ses matrices associées : le choix des bases n'importe pas.

Démonstration. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. Les colonnes de A sont formées des coordonnées des vecteurs $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Par définition du rang d'une matrice, le rang de A est égal au rang de la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$. Par ailleurs, comme $\mathcal{B}_E$ est une base de E, on sait que la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$ engendre $\mathrm{Im}(u)$. D'où $\mathrm{rg}\,(A) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u)$. $\square$

2 Cas des endomorphismes et des matrices carrées

2.1 Matrice d'un endomorphisme

Définition 2.1 : *Matrice d'un endomorphisme dans une base*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **matrice** de u dans la base $\mathcal{B}_E$ et l'on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(u)$.

Exemple 16. *Si E est un espace vectoriel de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, on remarque que pour $i \in [\![1, p]\!]$, $Id_E(e_i) = e_i$. La matrice associée à l'endomorphisme identité est I_p et ne dépend pas de la base de E choisie.*

Proposition 2.2 : *Matrice de la puissance d'un endomorphisme*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u))^n$$

avec $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

Démonstration. Avec la proposition 1.14, la démonstration se fait sans difficulté par récurrence sur n. □

2.2 Isomorphismes de E

Définition 2.3 : *Rappel : matrice inversible*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A\,B = B\,A = I_n.$$

Cette matrice est alors unique et on la note A^{-1}.

Théorème 2.4 : *Inversibilité de la matrice d'un isomorphisme de E*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$u \text{ est un isomorphisme de } E \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u))^{-1}$.

Démonstration. Démontrons uniquement le sens direct. Supposons que u soit un isomorphisme de E, espace vectoriel de dimension p. Comme $u \circ u^{-1} = Id_E$ et $u^{-1} \circ u = Id_E$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)\,\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = I_p \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1})\,\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = I_p.$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u))^{-1}$. □

Exemple 17. *Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On définit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ par*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+2) \end{aligned}$$

Déterminer la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Solution.

Proposition 2.5 : *Rang d'une matrice carrée inversible*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$$\mathrm{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible}$$

Démonstration. Soit u_A l'application linéaire canoniquement associée à A ($u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$).
$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad u_A \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}^n, \quad \text{(d'après le théorème 2.4)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(u_A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n, \quad \text{(d'après le théorème du rang)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n, \quad \text{(d'après le théorème 1.22)} \end{aligned}$$
□

2.3 Polynômes

2.3.1 Polynôme d'endomorphisme

Définition 2.6 : *Polynôme d'endomorphisme*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit $P(u)$ par
$$P(u) = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot u^i \in \mathcal{L}(E).$$

Définition 2.7 : *Polynôme annulateur d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est **annulateur** de u si
$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Exemple 18. *Le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de tout projecteur.*

Exemple 19. *Soit une application linéaire u définie par*
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Montrer que $X^2 - 5X + 6$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u.

Solution.

Proposition 2.8 : *Existence d'un polynôme annulateur en dimension finie*

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension n. D'après la remarque 1.13 $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, la famille $(Id_E, u, \ldots, u^{n^2})$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{L}(E)$ qui compte $n^2 + 1$ éléments. Comme $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$, cette famille est liée, c'est-à-dire qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$ non tous nuls, tels que
$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k \cdot u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
Si l'on pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, on a donc $P(u) = 0$ avec $P \neq 0$ puisque les a_k sont non tous nuls. □

Méthode 2.9 : *Bijectivité d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur*

On peut déterminer si un endomorphisme est bijectif et calculer sa réciproque à l'aide d'un polynôme annulateur : si un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur P s'écrivant

$$P(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \qquad \text{avec } \underline{a_0 \neq 0,}$$

alors on peut montrer que u est un isomorphisme de E et calculer u^{-1}.

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad &\Leftrightarrow \quad a_0\, Id_E + \cdots + a_r\, u^r = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \circ \left(a_1\, Id_E + \cdots + a_r\, u^{r-1} \right) = -a_0\, Id_E \\ &\Leftrightarrow \quad u \circ \left(-\frac{1}{a_0} \left(a_1\, Id_E + \cdots + a_r\, u^{r-1} \right) \right) = Id_E. \end{aligned}$$

Ainsi

$$u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left(a_1\, Id_E + \cdots + a_r\, u^{r-1} \right).$$

Exemple 20. *Si $P(u) = u^3 - 2u^2 - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors*

$$u \circ \left(u^2 - 2u \right) = Id_E$$

donc u est un isomorphisme de E et $u^{-1} = u^2 - 2u$.

Théorème 2.10 : *Rappel : binôme de Newton dans $\mathcal{L}(E)$*

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}$. Si u et v <u>commutent</u> ($u \circ v = v \circ u$) alors

$$(u+v)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k \circ v^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{p-k} \circ v^k.$$

Démonstration. La démonstration suit exactement les mêmes étapes que celles du chapitre Dénombrement. □

2.3.2 Polynôme d'une matrice carrée

Définition 2.11 : *Rappel : polynôme d'une matrice carrée*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit $P(A)$ par

$$P(A) = \sum_{i=0}^{r} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.12 : *Polynômes de matrices et d'endomorphismes*

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$. Alors

$$P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(P(u))$$

Les résultats qui suivent sont donc similaires à ceux donnés pour les polynômes d'endomorphisme.

Définition 2.13 : *Polynôme annulateur d'une matrice carrée*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est **annulateur** de A si

$$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Exemple 21. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérifier que le polynôme* $P(X) = X^2 + 2X - 3$ *est annulateur de* A*.*

Solution.

Proposition 2.14 : *Existence d'un polynôme annulateur pour une matrice carrée*

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration. La démonstration est similaire à la proposition 2.8. □

Méthode 2.15 : *Inversibilité d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur*

On peut déterminer l'inversibilité d'une matrice carrée et calculer son inverse à l'aide d'un polynôme annulateur : si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur P s'écrivant

$$P(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \qquad \text{avec } \underline{a_0 \neq 0,}$$

alors on peut montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(A) = 0_n \quad &\Leftrightarrow \quad a_0\, I_n + \cdots + a_r\, A^r = 0_n \\ &\Leftrightarrow \quad A\left(a_1\, I_n + \cdots + a_r\, A^{r-1}\right) = -a_0 I_n \\ &\Leftrightarrow \quad A\left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1\, I_n + \cdots + a_r\, A^{r-1}\right)\right) = I_n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_1\, I_n + \cdots + a_r\, A^{r-1}\right).$$

Exemple 22. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *On a vu que le polynôme* $P(X) = X^2 + 2X - 3$ *était annulateur de* A*. En déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}*.*

Solution.

Méthode 2.16 : *Calcul de la puissance n-ème d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur*

Dans certains cas, on peut également calculer la puissance n-ème d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. On procède par récurrence en utilisant le polynôme annulateur durant l'étape d'hérédité.

Exemple 23. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que le polynôme* $P(X) = X^2 - 3X + 2$ *est annulateur de* A.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2^n - 1)A - (2^n - 2)I_3$.

Solution.

Théorème 2.17 : *Rappel : binôme de Newton pour des matrices carrées*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. Si A et B commutent ($A\,B = B\,A$) alors

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\, B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}\, B^k.$$